2007,**27A**(1):171–175

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

局部可分度量空间闭 s 映象的注记 *

林寿
(漳州师范学院数学系　漳州 363000)
(宁德师范高等专科学校数学研究所　宁德 352100)
燕鹏飞
(五邑大学数理系　江门 529020)

摘要：该文讨论局部可分度量空间闭 s 映象的分解定理，证明了正则的 Fréchet 空间是局部可分度量空间的闭 s 映象当且仅当满足如下条件：具有点可数的 cs^* 网，第一可数的闭子空间是局部可分的，且 Lindelöf 的闭子空间是可分的.

关键词：cs^* 网；wcs^* 网；闭映射；s 映射；$\aleph_1$ 紧性；可分性；Lindelöf 性.

MR(2000) 主题分类：54E35; 54D50; 54D55; 54E18　**中图分类号**：O189.1　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2007)01-171-05

1 引言

寻求度量空间在适当映射下象空间的刻画是一般拓扑学的中心问题之一． 1985 年， L Foged 获得了度量空间闭映象的优美刻画激发人们关注各类闭映射问题 [1]. 关于局部可分度量空间的闭 s 映象的特征，已有下述较好结果 [2,3].

引理 1.1　对于正则空间 X, 下述条件相互等价

(1) X 是局部可分度量空间的闭 s 映象；

(2) X 是具有点可数可分 cs^* 网的 Fréchet 空间；

(3) X 是度量空间的闭 s 映象且 X 的第一可数闭子空间是局部可分的.

上述刻画有不理想之处，如条件 (2) 中的 cs^* 网要求 "可分" 性，在构造上有一定的困难；条件 (3) 依赖于另一度量空间及其闭映射，不是完全 "内在的" 特征．得到一些相对独立的分解条件是非常必要的．另一方面， N V Velichko[4] 曾提出关于局部可分度量空间映象的一般性问题．这些事实导出下述问题.

问题 1.1　局部可分度量空间的闭 s 映象是否可刻画为第一可数闭子空间是局部可分的，具有点可数 cs^* 网的正则的 Fréchet 空间？

以此为出发点，本文先讨论具有点可数 wcs^* 网空间的一些可数性质，而后获得了局部可分度量空间闭 s 映象的下述分解定理 (推论 3.1).

定理 1.1　正则的 Fréchet 空间 X 是局部可分度量空间的闭 s 映象当且仅当 X 为第一可数闭子空间是局部可分的，具有点可数 cs^* 网的， Lindelöf 闭子空间是可分的空间.

本文所论空间都是满足正则且 T_2 分离性质的拓扑空间，映射是连续的满函数．未定义或未给出出处的术语可参考文献 [1, 5].

收稿日期：2005-03-15; 修订日期：2006-01-08

E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn; ypengfei@sina.com

* 基金项目：国家自然科学基金 (10571151) 和福建省自然科学基金 (2006J0397) 资助

2 点可数 wcs^* 网的空间

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为点可数的, 若 X 的每一单点集至多与 $\mathcal{P}$ 中的可数个元相交. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs^* 网 [6](或 wcs^* 网 [7]), 若对于 X 中任一收敛序列 $\{x_n\}$, 如果 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 U 是 x 的邻域, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 和子序列 $\{x_{n_i}\}$ 使得

$$\{x\}\cup\{x_{n_i}:n\in\mathbf{N}\}\subset P\subset U\ (\text{或}\ \{x_{n_i}:n\in\mathbf{N}\}\subset P\subset U).$$

$\mathcal{P}$ 称为 X 的可分 cs^* 网, 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs^* 网且 $\mathcal{P}$ 的每一元是 X 的可分子空间.

引理 2.1 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 wcs^* 网. 若 x 在 X 的子空间 S 中具有可数局部基, 则对于 x 在 X 中的任一邻域 U, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得

$$x\in\operatorname*{int}_S(S\cap(\cup\mathcal{F}))\subset\cup\mathcal{F}\subset U.$$

证 设 $\{V_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是 x 在子空间 S 中递减的局部基且 $V_1\subset U$. 令 $\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P}:P\subset U\}$. 若命题不成立, 则对于每一 $n\in\mathbf{N}$ 及 $\mathcal{P}'$ 的有限子集 $\mathcal{F}$, $V_n\not\subset\cup\mathcal{F}$. 对于每一 $z\in U$, 记

$$\{P\in\mathcal{P}':z\in P\}=\{P_k(z)\}_{k\in\mathbf{N}}.$$

让 $x_0=x$, 由归纳法, 存在 U 中的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n\in V_n\setminus\bigcup\{P_k(x_i):k\le n,i<n\}$. 则序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且每一 $P_k(x_i)$ 仅含序列 $\{x_n\}$ 的有限项. 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs^* 网, 存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $P\subset U$ 且 P 含有序列 $\{x_n\}$ 的无限项, 矛盾. ∎

空间 X 称为 $\aleph_1$ 紧的, 若 X 的闭离散子空间至多是可数集. X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的 $\aleph_1$ 紧闭包的 wcs^* 网 (或 cs^* 网), 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs^* 网 (或 cs^* 网) 且 $\mathcal{P}$ 的每一元的闭包是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集. 显然, Lindelöf 空间是 $\aleph_1$ 紧空间.

定理 2.1 设空间 X 具有点可数 wcs^* 网. 则 X 具有点可数的 $\aleph_1$ 紧闭包的 wcs^* 网当且仅当 X 的第一可数闭子空间是局部 $\aleph_1$ 紧的.

证 必要性. 设 X 具有点可数的 $\aleph_1$ 紧闭包的 wcs^* 网且 F 是 X 的第一可数闭子空间. 若 F 不是局部 $\aleph_1$ 紧空间, 则存在 $x\in F$ 使得 x 在 F 中任一邻域的闭包不是 F 的 $\aleph_1$ 紧子集, 于是存在 x 在 F 中的局部基 $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 和 F 的互不相交的闭离散子集列 $\{D_n\}$ 满足: 每一 $|D_n|=\aleph_1$ 且 $x\notin D_n\subset U_n\setminus\bigcup\limits_{i<n}D_i$. 令 $T=\{x\}\cup(\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}D_n)$, 则 F 的闭子空间 T 也具有点可数的 $\aleph_1$ 紧闭包的 wcs^* 网 $\mathcal{Q}$. 对于每一 $t\in T$, 因为 T 是第一可数空间, 由引理 2.1, 存在 $\mathcal{Q}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得 $t\in\operatorname*{int}_T(\cup\mathcal{F})$, 而 $\cup\{\overline{F}:F\in\mathcal{F}\}$ 是 T 的 $\aleph_1$ 紧子空间, 所以 T 是局部 $\aleph_1$ 紧空间, 矛盾.

充分性. 不妨设 $\mathcal{P}$ 是 X 的关于有限交封闭的点可数 wcs^* 网. 让 $\mathcal{H}=\{P\in\mathcal{P}:\overline{P}$ 是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集 $\}$. 下面证明 $\mathcal{H}$ 是 X 的 wcs^* 网. 对于 X 中任一收敛序列 $\{x_n\}$, 设 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 U 是 x 的邻域, 让 $S=\{x\}\cup\{x_n:n\in\mathbf{N}\}$, 并且令 $\mathcal{P}_S=\{P\in\mathcal{P}:P\cap S\neq\emptyset\}$. 则 $\mathcal{P}_S$ 是可数的, 于是 $\{\mathcal{F}\subset\mathcal{P}_S:\mathcal{F}$ 是有限的且序列 $\{x_n\}$ 是终于 $\cup\mathcal{F}$ 的 $\}$ 是可数的, 设其为 $\{\mathcal{P}_i\}$. 对于每一 $n\in\mathbf{N}$, 置 $\mathcal{A}_n=\bigwedge\limits_{i\le n}\mathcal{P}_i$, $A_n=\cup\mathcal{A}_n$. S 是 X 的第一可数的子空间, 由引理 2.1, $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是 x 在 X 中递减的网. 如果所有的 $\overline{A}_n$ 都不是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集, 那么 $\overline{A}_n$ 含有闭离散子集 D_n 使得 $|D_n|=\aleph_1$. 定义 $C=\{x\}\cup(\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}D_n)$, 并赋 C 予 X 的子空间拓扑. 则 C 是 X 的第一可数的闭子空间, 但 C 不是局部 $\aleph_1$ 紧的, 矛盾. 因此, 某一 $\overline{A}_m$ 是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集. 则存在 $n\ge m$ 使得 $A_n\subset U$, 从而存在 $P\in\mathcal{A}_n\subset\mathcal{H}$ 使得 P 含有序列 $\{x_n\}$ 的无限项. 于是 $\mathcal{H}$ 是 X 的 wcs^* 网. ∎

推论 2.1 设空间 X 具有点可数 cs^* 网. 则 X 具有点可数的 $\aleph_1$ 紧闭包的 cs^* 网当且仅当 X 的第一可数闭子空间是局部 $\aleph_1$ 紧的.

证 必要性是定理 2.1 的直接结论. 在定理 2.1 充分性的证明中，重新定义

$$\mathcal{P}_S=\{P\in\mathcal{P}:P\cap S\neq\emptyset,\ \text{且若}\ P\ \text{含有序列}\ S\ \text{中的无限项，则}\ x\in P\},$$

用类似的方法可以证明充分性. ∎

下面进一步讨论具有点可数 wcs^* 网空间的可数覆盖性质. 具有可数 wcs^* 网的空间称为 $\aleph_0$ 空间. $\aleph_0$ 空间也等价于具有可数 cs^* 网的空间 [7]. X 称为 meta-Lindelöf 空间，若 X 的每一开覆盖具有点可数的开加细. X 称为 Fréchet 空间，若对于 X 的子集 A 及 $x\in\overline{A}$, 存在 A 中点组成的序列在 X 中收敛于 x. 为了定理 2.2 证明的简明起见，引入几个记号. 空间 X 的覆盖 $\mathcal{U}$ 称为 X 的按子标良序覆盖，若

$$\mathcal{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\},$$

其中 Λ 是良序子标集. 对于这种覆盖 $\mathcal{U}$, 若 $x\in X$, 记 $\alpha(x)=\min\{\alpha\in\Lambda:x\in U_\alpha\}$; 若 $\alpha\in\Lambda$, 记

$$\widetilde{U}_\alpha=\{x\in X:\alpha(x)=\alpha\}.$$

显然，$\widetilde{U}_\alpha\subset U_\alpha$.

定理 2.2 点可数 wcs^* 网的 Fréchet 空间具有下述性质

(1) $\aleph_1$ 紧子空间是 Lindelöf 空间;

(2) 可分子空间是 $\aleph_0$ 空间.

证 设 $\mathcal{P}$ 是 Fréchet 空间 X 的点可数 wcs^* 网.

(1) 由于 Lindelöf 空间等价于 $\aleph_1$ 紧的 meta-Lindelöf 空间 (文献 [8] 定理 6.6.22), 所以只须证明 X 的子空间是 meta-Lindelöf 空间.

设 Y 是 X 的子空间，$\mathcal{W}$ 是 Y 的开覆盖. 由良序化定理，记 $\mathcal{W}$ 为按子标良序覆盖 $\{W_\alpha:\alpha<\gamma\}$, 取 X 的开覆盖 $\{U_\alpha:\alpha\leq\gamma\}$ 使得 $U_\gamma=X$ 且当 $\alpha<\gamma$ 时有 $U_\alpha\cap Y=W_\alpha$. 置 $\mathcal{H}=\{P\in\mathcal{P}:\text{存在}\alpha\leq\gamma\text{使得}P\subset U_\alpha\}$, 则 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{U}$ 的点可数加细. 若 $x\in X$, 那么 $x\in U_{\alpha(x)}$, 于是存在 X 的开子集 V 使得 $x\in V\subset\overline{V}\subset U_{\alpha(x)}$. 如果

$$x\in X\setminus(\cup\{P\in\mathcal{H}:x\in\overline{P}\subset U_{\alpha(x)}\})^\circ=\overline{X\setminus\cup\{P\in\mathcal{H}:x\in\overline{P}\subset U_{\alpha(x)}\}},$$

则存在 $X\setminus\cup\{P\in\mathcal{H}:x\in\overline{P}\subset U_{\alpha(x)}\}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 从而存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $P\subset V$ 且 P 含有序列 $\{x_n\}$ 的无限项，那么 $x\in\overline{P}\subset U_{\alpha(x)}$ 且 $P\in\mathcal{H}$, 这与 $\{x_n\}$ 的选取相矛盾. 故 $x\in(\cup\{P\in\mathcal{H}:x\in\overline{P}\subset U_{\alpha(x)}\})^\circ$. 对于每一 $\alpha\leq\gamma$, 置 $V_\alpha=(\cup\{H\in\mathcal{H}:\overline{H}\subset U_\alpha,\text{当}\beta<\alpha\text{时有}\overline{H}\not\subset U_\beta\})^\circ$, 则 $\{V_\alpha:\alpha\leq\gamma\}$ 是 $\{U_\alpha:\alpha\leq\gamma\}$ 的点可数开加细且满足：若 $\alpha\leq\gamma$, 则 $\widetilde{U}_\alpha\subset V_\alpha\subset U_\alpha$. 若 $y\in Y$, 则存在 $\alpha<\gamma$ 使得 $y\in\widetilde{U}_\alpha\subset V_\alpha$. 从而 $\{V_\alpha\cap Y:\alpha<\gamma\}$ 是 $\mathcal{W}$ 的点可数开加细，因此 Y 是 meta-Lindelöf 空间. 故 X 的 $\aleph_1$ 紧子空间是 Lindelöf 空间.

(2) 不妨设 X 是可分的，让 D 是 X 的可数稠密子集. 置 $\mathcal{F}=\{\overline{P}:P\in\mathcal{P},P\cap D\neq\emptyset\}$, 则 $\mathcal{F}$ 是可数的. 对于 X 中任一收敛序列 $\{x_n\}$, 设 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 U 是 x 的邻域. 置

$$\mathcal{F}'=\{F\in\mathcal{F}:F\subset U\}=\{F_i:i\in\mathbf{N}\}.$$

存在 X 的开子集 V 使得 $x\in V\subset\overline{V}\subset U$. 因为 $x\in\overline{D}$, 存在 $V\cap D$ 中的序列 $\{z_n\}$ 收敛于 x, 从而存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 P 含有序列 $\{z_n\}$ 的无限项且 $P\subset V$, 因此 $x\in\overline{P}\in\mathcal{F}'$. 则存在 $m\in\mathbf{N}$

使得序列 $\{x_n\}$ 是终于 $\bigcup\limits_{i\le m} F_i$. 若不然，不妨设 $x \in F_1$, 且每一 $x_n \in X \setminus \bigcup\limits_{i\le n} F_i$(必要时可换成子序列), 则存在 x_n 的邻域 V_n 使得 $\overline{V_n} \cap (\bigcup\limits_{i\le n} F_i) = \emptyset$. 于是 $x \in \overline{\bigcup\limits_{n\in \mathbf{N}} (V_n \cap D)}$. 存在 D 中收敛于 x 的序列 $\{d_k\}$ 使得每一 $d_k \in V_{n_k}$ 且 $n_k \to \infty$. 这时每一 F_i 仅含有序列 $\{d_k\}$ 的有限项且存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $\overline{P} \subset U$ 且 P 含有序列 $\{d_k\}$ 的无限项，于是 $\overline{P} \in \mathcal{F}'$, 矛盾. 从而存在 $k \le m$ 使得 F_k 含有序列 $\{x_n\}$ 的无限项. 故 $\mathcal{F}$ 是 X 的可数的 wcs^* 网. 即 X 是 $\aleph_0$ 空间. ▌

3 度量空间的闭 s 映象

设映射 $f: X \to Y$. f 称为 s 映射，若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的可分子集. 本文的主要结果是下述局部可分度量空间闭 s 映象的分解定理.

定理 3.1 空间 X 是局部可分度量空间的闭 s 映象当且仅当 X 具有如下性质

(1) 具有点可数 cs^* 网的 Fréchet 空间;

(2) 第一可数闭子空间是局部 $\aleph_1$ 紧的;

(3) $\aleph_1$ 紧闭子空间是可分的.

证 先设 X 是局部可分度量空间的闭 s 映象. 由引理 1.1(2), X 满足条件 (1). 设 A 是 X 的第一可数的闭子空间，由引理 1.1(3), A 是局部可分的，再由 (1) 和定理 2.2(2), A 是局部 $\aleph_0$ 空间，而 $\aleph_0$ 空间是 $\aleph_1$ 紧空间 (文献 [1] 命题 1.6.7), 所以 A 是局部 $\aleph_1$ 紧空间，故条件 (2) 成立. 设 B 是 X 的 $\aleph_1$ 紧的闭子空间，因为度量空间的闭映象是 σ 空间，即具有 σ 离散网 (network) 的空间 (文献 [1] 命题 3.3.4 和定理 3.3.1), 而 σ 空间的子空间仍是 σ 空间，所以 B 是 σ 空间. 又因为 $\aleph_1$ 紧空间的离散集族是可数族，所以 B 具有可数网，从而 B 是可分空间 (文献 [1] 命题 1.5.8), 故条件 (3) 成立.

反之，设空间 X 满足所列条件 (1)–(3). 由推论 2.1, X 具有点可数的 $\aleph_1$ 紧闭包的 cs^* 网，再由 (3) 和定理 2.2(2), X 具有点可数的 $\aleph_0$ 闭包的 cs^* 网. 因为 $\aleph_0$ 空间是遗传可分空间 (文献 [1] 命题 1.6.7), 所以 X 具有点可数的可分 cs^* 网. 由引理 1.1(2), X 是局部可分度量空间的闭 s 映象. ▌

推论 3.1 设 X 是具有点可数 cs^* 网的 Fréchet 空间. 则 X 是局部可分度量空间的闭 s 映象当且仅当 X 的第一可数闭子空间是局部可分的且 X 的 Lindelöf 闭子空间是可分的.

证 必要性是定理 3.1 的直接推论. 若空间 X 满足充分性条件，由定理 2.2(2) 和 (1), X 满足定理 3.1 的条件 (2) 和 (3), 所以 X 是局部可分度量空间的闭 s 映象. ▌

本文最后的例子说明定理 3.1 的各条件是相互独立的.

例 3.1 存在具有点可数基的 Lindelöf 的非可分空间.

设 B 是单位闭区间 $\mathbf{I}$ 的 Bernstein 子集，即 B 是 $\mathbf{I}$ 的不可数子集且关于欧氏拓扑的闭子集都是可数集 (文献 [5] 问题 5.5.4). 集合 $Z = \mathbf{I}$ 赋予下述拓扑 (Michael 直线拓扑):B 中的点是 Z 的孤立点， $Z \setminus B$ 中的点具有通常的欧氏邻域. 则 Z 是具有点可数基的正则空间. 由于 B 是 Bernstein 集， Z 是 Lindelöf 空间，但是 Z 不是可分空间. 这表明定理 3.1 中的条件 $(1) + (2) \not\Rightarrow (3)$.

例 3.2 刺猬空间 $\mathbf{J}(\aleph_1)$(文献 [5] 例 4.1.5): 非局部可分的度量空间.

由于 $\mathbf{J}(\aleph_1)$ 是度量空间，所以它具有点可数基且 $\aleph_1$ 紧闭子空间是可分的. 又由于 $\mathbf{J}(\aleph_1)$ 非局部可分, 从而它是非局部 $\aleph_1$ 紧的第一可数空间. 这表明定理 3.1 中的条件 $(1)+(3) \not\Rightarrow (2)$.

例 3.3 扇空间 S_{ω_1}(文献 [1] 命题 2.7.21): 局部紧度量空间的闭映象，但不是度量空间的闭 s 映象.

S_{ω_1} 是把 ω_1 个非平凡的收敛序列 (含极限点) 的拓扑和，粘合所有极限点得到的商空间．所以 S_{ω_1} 是局部紧度量空间的闭映象，于是它是具有点可数 wcs^* 网的 Fréchet 空间，第一可数闭子空间是局部 $\aleph_1$ 紧的，且 $\aleph_1$ 紧闭子空间是可分的．由于 S_{ω_1} 不具有点可数 cs^* 网，所以它不是度量空间的闭 s 映象 (文献 [1] 定理 2.7.23)．这表明定理 3.1 中的条件 $(2)+(3) \not\Rightarrow (1)$．

参 考 文 献

[1] 林寿. 广义度量空间与映射. 北京：科学出版社， 1995

[2] Sakai M. On spaces with a star-countable k-network. Houston J Math, 1997, **23**(1): 45–56

[3] Lin Shou, Liu Chuan, Dai Mumin. Images of locally separable metric spaces. Acta Math Sinica, 1997, **13**(1): 1–8

[4] Velichko N V. Quotient spaces of metrizable spaces (in Russian). Sibirskii Mat Zhurnal, 1987, **28**(4): 73–81

[5] Engelking R. General Topology (Revised and Completed Edition). Berlin: Heldermann Verlag, 1989

[6] Gao Zhimin. $\aleph$-space is invariant under perfect mappings. Questions Answers in General Topology, 1987, **5**(2): 271–279

[7] Lin Shou, Tanaka Y. Point-countable k-networks, closed maps and related results. Topology Appl, 1994, **59**(1): 79–86

[8] 高国士. 拓扑空间论. 北京：科学出版社， 2000

A Note on Closed s-images of Locally Separable Metric Spaces

Lin Shou

(*Department of Mathematics, Zhangzhou Teachers' College, Zhangzhou 363000*)

(*Institute of Mathematics, Ningde Teachers' College, Ningde 352100*)

Yan Pengfei

(*Department of Mathematics and Physics, Wuyi University, Jiangmen 529020*)

Abstract: In this note a decomposition theorem about closed s-images of locally separable metric spaces is discussed. It is showed that a regular Fréchet space is a closed s-image of a locally separable metric space if and only if it has a point-countable cs^*-network, each first countable closed subset is locally separable, and each Lindelöf closed subset is separable.

Key words: cs^*-networks; wcs^*-networks; Closed mappings; s-mappings; $\aleph_1$-compactness; Separability; Lindelöfness.

MR(2000) Subject Classification: 54E35; 54D50; 54D55; 54E18